SEMINAR NASIONAL MATEMATIKA 2015

"Membangun Tradisi Pembelajaran Matematika yang Menyenangkan"

Sabtu, 30 Mei 2015

ISBN: 978-979-8559-54-9

Universitas PGRI Adi Buana Surabaya
Fakultas Keguruan dan Ilmu
Pendidikan Matematika

SEMINAR NASIONAL MATEMATIKA 2015

"Membangun Tradisi Pembelajaran Matematika yang Menyenangkan"

Editor : 1. H. Sunyoto Hadi Prayitno, Drs., S.T., M.Pd.
2. Sri Rahayu, Dra., S.Si., M.Pd.
3. Lidya Lia Prayitno, S.Pd., M.Pd.
4. Erlin Ladyawati, S.Pd., M.Pd.
5. Liknin Nugraheni, S.Pd., M.Pd.
6. Nur Fathonah, S.Pd., M.Pd.

Desain Sampul : Yosep Sophan Saputra

Layout : Yosep Sophan Saputra

Diterbitkan oleh:

Adi Buana University Press

Universitas PGRI Adi Buana Surabaya

Jl. Ngagel Dadi III-B/37 Surabaya, 60245

Telp. : 031-5041097

Fax : 031-5042804

Website : unipasby.ac.id

E-Mail : unipasby@gmail.com

ISBN: 978-979-8559-54-9

SEMIRING PRIMA KUAT

Hanim Faizah
Universitas PGRI Adi Buana Surabaya
hanim06b@gmail.com

Abstrak

Semiring sudah dikenal dan dipelajari oleh ilmuwan-ilmuwan di dunia sejak dulu. Sejak ditemukan hingga saat ini, sudah banyak sekali pengembangan dari semiring. Di antara berbagai macam semiring tersebut salah satunya adalah Semiring Prima Kuat yang diperkenalkan oleh T.K. Dutta dan M.L. Das pada tahun 2006 dalam karyanya yang berjudul *On Strongly Prime Semiring*. Dalam artikel ini dibahas tentang pengertian dan beberapa sifat dari semiring prima kuat. Himpunan tak-kosong S dengan dua operasi biner disebut semiring jika setiap anggota S memenuhi sifat tertutup dan assosiatif, mempunyai elemen identitas 0 pada operasi pertama, memenuhi sifat distributif kanan dan distributif kiri, serta setiap anggota s jika dioperasikan dengan operasi kedua dengan 0 akan sama dengan 0. Suatu semiring $(S, +, \bullet)$ selanjutnya dapat disebut Semiring Prima Kuat jika setiap elemen tak-nol dari S mempunyai insulator kanan $S(r)$, dimana insulator kanan $S(r)$ adalah subset finit dari S sehingga dapat dibentuk himpunan $A=\{r\bullet s|s\in S(r)\}$ yang memenuhi $ann_R(A)=\{t\in S|At=0\}=\{0\}$.

Kata kunci: *semiring, semiring prima kuat*

PENDAHULUAN

Semiring sudah lama dikenal, dan sudah dipelajari oleh ilmuwan-ilmuwan dari berbagai negara di dunia. Semiring sendiri merupakan perluasan dari ring, di mana untuk setiap ring merupakan semiring, tetapi semiring belum tentu memenuhi ring. Sejak ditemukan hingga saat ini, sudah banyak sekali macam semiring yang ditemukan, salah satunya adalah Semiring Prima Kuat

Pada tahun 2006, T.K. Dutta dan M.L Das, dalam tulisannya yang berjudul *On Strongly Prime Semiring,* memperkenalkan tentang semiring prima kuat. Di mana pengertian semiring prima kuat adalah semiring yang setiap elemen tak-nolnya mempunyai insulator kanan.

Dalam artikel ini akan dibahas tentang pengertian beserta sifat-sifat Semiring Prima Kuat. Sedangkan metode yang digunakan dalam penulisan skripsi ini adalah metode studi pustaka. Yang diawali dengan mengaji tentang pengertian serta sifat-sifat semigrup dan semiring yang nantinya akan digunakan sebagai landasan untuk membuktikan teorema maupun proposisi yang berkaitan dengan semiring prima kuat.

PEMBAHASAN

1. SEMIRING

Definisi 1.1

Himpunan tak kosong S dengan dua operasi biner yang berurutan, yaitu "+" dan "•", disebut semiring jika memenuhi syarat berikut:

i. $(S, +)$ adalah semigrup komutatif dengan elemen identitas;

ii. $(S, \bullet)$ adalah semigrup;

iii. Untuk sebarang $a,b,c\in S$, berlaku sifat distributif kanan dan kiri sebagai berikut:

$$a \bullet (b+c) = (a \bullet b)+(a \bullet c),$$

$$(a+b) \bullet c = (a \bullet c)+(b \bullet c);$$

iv. $s \bullet 0 = 0 \bullet s = 0$, untuk semua $s \in S$, di mana 0 adalah elemen identitas pada operasi +.

Himpunan S yang membentuk semiring dengan dua operasi biner pada S, "+" dan "•", dinotasikan dengan (S, +, •). Selanjutnya jika S memuat elemen identitas pada operasi "•", maka S disebut semiring dengan unsur kesatuan.

Contoh 1.1:

Misalkan diketahui himpunan $\mathbb{N} \cup \{0\}$ dengan $\mathbb{N}$ merupakan himpunan semua bilangan asli. $\mathbb{N} \cup \{0\}$ dengan dua operasi biner + dan ×, akan memenuhi syarat-syarat untuk semiring, yaitu:

i. $(\mathbb{N} \cup \{0\}, +)$ merupakan semigrup komutatif dengan elemen identitasnya adalah 0.

ii. $(\mathbb{N} \cup \{0\}, \times)$ merupkan semigrup.

iii. Untuk setiap a, b, c $\in \mathbb{N} \cup \{0\}$ akan memenuhi sifat distributif kanan dan distributif kiri, yaitu sebagai berikut:

$$(a + b) \times c = (a \times c) + (b \times c)$$

$$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$$

iv. Untuk setiap a $\in \mathbb{N} \cup \{0\}$ akan memenuhi:

$$a \times 0 = 0 \times a = 0$$

Sehingga $\mathbb{N} \cup \{0\}$ dengan operasi + dan × merupakan semiring, dan dinotasikan dengan $(\mathbb{N} \cup \{0\}, +, \times)$. Karena ada $1 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ sedemikian sehingga untuk setiap $a \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ berlaku $a \times 1 = 1 \times a = a$, maka 1 merupakan unsur kesatuan pada $\mathbb{N} \cup \{0\}$. Jadi $(\mathbb{N} \cup \{0\}, +, \times)$ merupakan semiring dengan unsur kesatuan.

Definisi 1.2

Subset tak kosong I dari semiring (S, +,•) disebut ideal kiri pada S jika memenuhi:

i. $\forall a, b \in I$ berlaku $a+b \in I$, dan

ii. $\forall a \in I$ dan $\forall s \in S$ berlaku $s \bullet a \in I$.

Sedangkan I disebut ideal kanan pada S jika memenuhi:

i. $\forall a, b \in I$ berlaku $a+b \in I$, dan

ii. $\forall a \in I$ dan $\forall s \in S$ berlaku $a \bullet s \in I$.

I disebut ideal dua sisi pada S jika I merupakan ideal kanan dan ideal kiri pada S.

Definisi 1.3

Ideal I pada semiring S disebut ideal-k jika $b \in S$, $a+b \in I$ dan $a \in I$ maka $b \in I$.

Contoh 1.2:

Diketahui semiring $(\mathbb{Z}, +, \times)$, di mana $\mathbb{Z}$ adalah himpunan semua bilangan bulat. $2\mathbb{Z}$ adalah subset dari $\mathbb{Z}$. $2\mathbb{Z}$ merupakan ideal dari $\mathbb{Z}$ karena untuk setiap $a,b \in 2\mathbb{Z}$, $a+b \in 2\mathbb{Z}$ dan untuk sebarang $c \in \mathbb{Z}$ maka $a \times c = c \times a \in 2\mathbb{Z}$.

$2\mathbb{Z}$ merupakan ideal-k karena untuk $b \in \mathbb{Z}$, $a+b \in 2\mathbb{Z}$ dan $a \in 2\mathbb{Z}$, maka $b \in 2\mathbb{Z}$.

Definisi 1.4

Semiring S disebut semiring simpel jika ideal-ideal pada S hanya ideal $\{0\}$ dan S sendiri.

Contoh 1.3

Misal diketahui $\mathbb{Z}_5$=himpunan bilangan bulat modulo 5. $(\mathbb{Z}_5, +_5, \times_5)$ membentuk semiring. $\mathbb{Z}_5$merupakan semiring simpel. karena ideal pada $\mathbb{Z}_5$ hanyalah ideal $\{0\}$ dan $\mathbb{Z}_5$ sendiri.

Definisi 1.5

Misalkan A subset tak kosong dari semiring $(S, +, \bullet)$. Annihilator kanan dari A di S, dinotasikan dengan $ann_R(A)$, didefinisikan $ann_R(A) = \{s \in S \mid As = \{0\}\}$ dengan $As = \{a \bullet s \mid a \in A\}$.

Contoh 1.4:

Diketahui semiring $(\mathbb{Z}_{10}, +_{10}, \times_{10})$ dengan $\mathbb{Z}_{10}$ adalah himpunan semua bilangan bulat modulo 10. Misal $A \subseteq \mathbb{Z}_{10}$ dengan $A = \{2, 4, 6, 8\}$, maka dapat diketahui $ann_R(A) = \{p \in \mathbb{Z}_{10} \mid Ap = \{0\}\} = \{0, 5\}$.

Definisi 3.7

Semiring S disebut semiring prima jika untuk sebarang dua ideal pada S, misal H dan K, dan $HK=\{h \bullet k \mid h \in H, k \in K\}=\{0\}$, maka $H=\{0\}$ atau $K=\{0\}$.

Contoh 3.7:

Semiring $(\mathbb{Z}, +, \times)$ dengan $\mathbb{Z}$ adalah himpunan semua bilangan bulat, merupakan semiring prima. Karena untuk sebarang dua ideal pada $\mathbb{Z}$, misal H dan K, $HK=\{0\}$ jika $H=\{0\}$ atau $K=\{0\}$.

2. SEMIRING PRIMA KUAT

Definisi 2.1

Misalkan $(S, +, \bullet)$ semiring dan $r \in S^*$. Insulator kanan untuk r adalah subset finit tak-kosong $S(r)$ dari S yang memenuhi $ann_R(\{r \bullet s \mid s \in S(r)\}) = \{0\}$. Insulator kanan dari $r \in S^*$ tidak selalu tunggal.

Di mana S* merupakan notasi dari himpunan semua elemen tak-nol pada himpunan tak kosong S.

Definisi 2.2

Semiring (S, +, •) disebut semiring prima kuat jika setiap elemen tak-nol pada S mempunyai insulator kanan.

Contoh 2.1:

Misalkan diketahui semiring ($\mathbb{Z}_3$, $+_3$, $\times_3$). $\mathbb{Z}_3^* = \{1, 2\}$. Ambil sebarang $r \in \mathbb{Z}_3^*$, misal untuk r =1. Insulator kanan untuk 1 adalah $\mathbb{Z}_3(1)=\{1, 2\}$. Dapat dibentuk himpunan $A=\{1 \times_3 s \mid s \in \mathbb{Z}_3(1)\}=\{1, 2\}$, sehingga memenuhi:

$$ann_R(A)=\{b \in \mathbb{Z}_3 \ni \forall r \in A, r \times_3 b = 0\} = \{0\} \qquad \ldots(1)$$

Untuk r = 2, insulator kanan untuk 2 yaitu $\mathbb{Z}_3(2) = \{1, 2\}$. Dapat dibentuk himpunan $B=\{2 \times_3 s \mid s \in \mathbb{Z}_3(2)\}=\{1, 2\}$, sehingga memenuhi:

$$ann_R(B)=\{b \in \mathbb{Z}_3 \ni \forall r \in B, r \times_3 b = 0\} = \{0\} \qquad \ldots(2)$$

Dari (1) dan (2) diketahui bahwa untuk setiap elemen tak nol pada $\mathbb{Z}_3$ selalu ada insulator kanan $\mathbb{Z}_3(r)$. Maka $\mathbb{Z}_3$ merupakan semiring prima kuat.

Proposisi 2.1

Semiring prima kuat merupakan semiring prima.

Contoh 2.2:

Semiring ($\mathbb{Z}$, +, $\times$) merupakan contoh semiring prima kuat. Misalkan H dan K adalah dua ideal pada $\mathbb{Z}$, dengan $HK=\{h \times k \mid h \in H, k \in K\}=\{0\}$, sehingga mengakibatkan $H=\{0\}$ atau $K=\{0\}$. Maka $\mathbb{Z}$ merupakan semiring prima.

Teorema 2.1

Semiring (S, +, •) finit dengan unsur kesatuan merupakan semiring prima kuat, jika dan hanya jika setiap ideal I pada S, dengan $I \neq \{0\}$, memuat ideal kiri terbangun finit yang annihilator kanannya adalah {0}.

Bukti:

i. Bukti ke kanan

Misal diketahui (S, +, •) semiring prima kuat dengan unsur kesatuan, S finit, dan I adalah ideal dari S, dengan $I \neq \{0\}$. Misal $r \in I$, $r \neq 0$. Karena S adalah semiring prima kuat maka r punya insulator kanan, misal S(r).

S(r) adalah subset finit dari S, maka rS(r) finit, dan rS(r) $\subseteq$ I. Ambil sebarang anggota di rS(r), misal (ra). $\langle ra \rangle$ = {s•(ra) | s $\in$ S} adalah ideal kiri yang terbangun oleh ra di S, dan $\langle ra \rangle$ finit.

Selanjutnya, ann_R ($\langle ra \rangle$) = {t $\in$ S |$\langle ra \rangle$t ={0}} = {0}.

Jadi karena rS(r) $\subseteq$ I, ra $\in$ rS(r) dan I adalah ideal di S, maka $\langle ra \rangle \subseteq$ I. Dan diperoleh bahwa $ann_R(\langle ra \rangle)$={0}.

Sehingga ideal I dari semiring prima kuat S memuat ideal kiri terbangun oleh ra yang annihilator kanannya {0}.

ii. Bukti ke kiri

Misal diketahui semiring S dengan unsur kesatuan 1, dan S finit, setiap ideal tak-nol S memuat ideal kiri terbangun finit yang annihilator kanannya adalah {0}.

Misal r$\in$S*, $\langle r \rangle$ merupakan ideal tak-nol dari S. Berdasarkan yang telah diketahui di atas, maka ada subset finit F dari ideal $\langle r \rangle$ yang annihilator kanan dari ideal kiri yang dibangun oleh F adalah {0}. F$\subseteq\langle r \rangle$ dan 0$\notin$F, maka elemen-elemen di F dapat dinyatakan dalam bentuk $r_i' r r_i$, dengan r_i' atau r_i sama dengan 1.

Kemudian dibentuk himpunan S(r), yaitu jika $r_1' r r_1 + r_2' r r_2 + \cdots + r_m' r r_m \in$F maka $r_1, r_2, \dots, r_m \in$S(r).

Misalkan S(r)={$r_1, r_2, \dots, r_k$}. Akan dibuktikan bahwa S(r) merupakan insulator kanan untuk r.

Misal rS(r)= r{$r_1, r_2, \dots, r_k$} = {$rr_1, rr_2, \dots, rr_k$}. Maka:

$$Ann_R(rS(r)) = \{t \in S \mid rS(r)t = \{0\}\} = \{0\}$$

karena telah diketahui bahwa setiap ideal tak-nol pada S memuat ideal kiri yang tebangun finit yang annihilator kanannya adalah {0}.

Sehingga akibatnya S(r) merupakan insulator kanan untuk r. dan karena r adalah elemen sebarang pada S*, maka berlaku S(r) merupakan insulator kanan untuk setiap r$\in$S*.

Jadi S merupakan semiring prima kuat. ■

Contoh 2.3:

Misal ($\mathbb{Z}_7$, $+_7$, $\times_7$) adalah semiring finit dengan unsur kesatuan. Ideal-ideal pada $\mathbb{Z}_7$ adalah {0} dan $\mathbb{Z}_7$, maka ideal tak-nol pada $\mathbb{Z}_7$ adalah $\mathbb{Z}_7$ sendiri. Ambil 2$\in\mathbb{Z}_7$, $\langle 2 \rangle$={0, 1, 2, 3, 4, 5, 6}. $\langle 2 \rangle$merupakan ideal kiri yang terbangun secara finit oleh 2 pada $\mathbb{Z}_7$. $Ann_R(\langle 2 \rangle)$ = {r$\in$S |$\langle 2 \rangle$r={0}}={0}. Maka ($\mathbb{Z}_7$, $+_7$, $\times_7$) merupakan semiring prima kuat.

Teorema 2.3

Semiring (S, +, •) merupakan semiring prima kuat jika dan hanya jika setiap ideal I dari S, dengan I≠{0}, memuat subset finit G sedemikian sehingga ann_R(G)={0}.

Bukti:

i. Bukti ke Kanan

Misal diketahui S adalah semiring prima kuat dan I adalah sebarang ideal pada S, dengan $I \neq \{0\}$. Diambil sebarang elemen I, misal a dengan $a \neq 0$. Karena S semiring prima kuat, a pasti mempunyai insulator kanan, misal S(a). dan misalkan $aS(a)=G$. Karena S(a) finit maka G adalah subset finit dari I, dan $ann_R(G)=(0)$.

ii. Bukti ke Kiri

Misal diketahui semiring S, setiap ideal I dari S, dengan $I \neq \{0\}$, memuat subset finit yang annihilator kanannya adalah $\{0\}$.

Akan dibuktikan S adalah semiring prima kuat:

Andaikan S bukan semiring prima kuat, maka ada $a \in I$ dengan $a \neq 0$. a tidak mempunyai insulator kanan.

Misal G sebarang subset S dengan $G \neq \phi$ dan G finit. $F=aG$ maka $F \subseteq I$ dan karena a tidak punya insulator kanan maka $ann_R(F) \neq \{0\}$.

$Ann_R(F) = ann_R(aG) \neq \{0\}$, hal ini terjadi kontradiksi dengan yang diketahui bahwa I memuat subset finit yang annihilator kanannya adalah $\{0\}$.

Jadi, kemungkinannya hanyalah a mempunyai insulator kanan. Karena a sebarang elemen pada S, maka S adalah semiring prima kuat. ■

Contoh 2.4:

Dari Contoh 3.12, diketahui bahwa $\mathbb{Z}_3$ merupakan semiring prima kuat. Misal H ideal di $\mathbb{Z}_3$, $H \neq \{0\}$, dengan $H=\mathbb{Z}_3=\{0, 1, 2\}$. Maka untuk setiap $a \neq 0$, $a \in H$, ada insulator kanan pada $\mathbb{Z}_3$, misal $\mathbb{Z}_3(a)=\{1, 2\}$. Sehingga dapat dibentuk suatu himpunan finit pada H, misal $G=a\mathbb{Z}_3(a)=\{a \times_3 b \mid b \in \mathbb{Z}_3(a)\}$, yang memenuhi $ann_R(G)=\{0\}$.

Proposisi 2.2

Sebarang semiring simpel dengan unsur kesatuan merupakan semiring prima kuat.

Contoh 2.5:

Misal diketahui semiring simpel $(\mathbb{Z}_5, +_5, \times_5)$ dengan unsur kesatuannya adalah 1, maka $\mathbb{Z}_5$ merupakan semiring prima kuat.

Definisi 2.3

Jika suatu subset finit F dari semiring $(S, +, \bullet)$ merupakan insulator kanan untuk setiap $a \in S$, $a \neq 0$, maka F disebut insulator kanan seragam untuk S. Selanjutnya semiring $(S, +, \bullet)$ disebut semiring prima kuat seragam jika S memuat insulator kanan seragam.

Contoh 2.6:

Misal diketahui semiring $2\mathbb{Z}$ dan F={2, 4, 6} merupakan subset finit dari $2\mathbb{Z}$. F merupakan insulator kanan untuk semua elemen di $2\mathbb{Z}$. Maka F disebut insulator kanan seragam pada $2\mathbb{Z}$. Karena $2\mathbb{Z}$ mempunyai insulator kanan seragam, maka $2\mathbb{Z}$ disebut semiring prima kuat seragam.

Definisi 2.4

Semiring (S, +, •) disebut semiring prima kuat terbatas dengan batas n (dinotasikan dengan $SP_r(n)$) jika untuk setiap $a\in S$, $a\neq 0$, $\exists$ $H\subseteq S$, H insulator kanan a, banyaknya elemen H $\leq$ n, dan $\exists$ $b\in S$, $\exists$ $G\subseteq$ S, G insulator kanan b, banyak elemen G $\geq$ n (atau paling sedikit banyaknya elemen G =n). Dalam hal ini n disebut juga batas seragam pada S.

Contoh 2.7:

Misalkan diketahui $\mathbb{Z}_3$ adalah semiring. Elemen tak-nol dari semiring $\mathbb{Z}_3$ adalah 1 dan 2. Pada Contoh 3.12, telah dibuktikan bahwa $\mathbb{Z}_3$ merupakan semiring prima kuat. $\mathbb{Z}_3$dikatakan semiring prima kuat terbatas dengan batas 1, karena untuk setiap elemen tak-nol pada $\mathbb{Z}_3$, yaitu 1 dan 2, mempunyai insulator kanan yang sama, yaitu {1, 2}; {1}; {2}. Karena 1, 2 $\in\mathbb{Z}_3$ mempunyai insulator kanan {1} dan {2} yang banyak anggotanya $\leq$1 dan ada $1\in\mathbb{Z}_3$ yang tidak mempunyai insulator kanan yang banyak anggotanya $\geq$1, yaitu {1, 2}, {1}, dan {2}. Sehingga 1 dikatakan batas seragam pada $\mathbb{Z}_3$.

Proposisi 2.3

Sebarang *semi-integral domain* merupakan semiring prima kuat terbatas dengan batas 1.

Contoh 2.83.19:

Misalkan diketahui *semi-integral domain*$\mathbb{Z}_5$. Maka $\mathbb{Z}_5$ merupakan semiring prima kuat terbatas dengan batas 1.

KESIMPULAN

Dari uraian di atas, dapat disimpulkan sebagai berikut:

1. Semiring prima kuat (S, +, •) adalah semiring S yang setiap elemen tak-nolnya mempunyai insulator kanan.
2. Semiring prima kuat merupakan semiring prima.
3. Semiring S finit dengan unsur kesatuan merupakan semiring prima kuat jika dan hanya jika setiap ideal tak-nolnya memuat ideal kiri terbangun finit yang annihilator kanannya adalah {0}.

4. Semiring S merupakan semiring prima kuat jika dan hanya jika ideal tak-nolnya memuat subset finit yang annihilator kanannya adalah {0}.

DAFTAR PUSTAKA

Dutta, T.K dan M.L Das. 2006. *On Strongly Prime Semiring*. Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society, (2) 30(2)(2007). (Didownload dari http://emis.impa.br/EMIS/journals/BMMSS/pdf/v30n2/v30n2p6.pdf pada tanggal 28 Februari 2010 pukul 23.54)

Gallian, Joseph A. 1990. *Contemporary Abstract Algebra*. New York: Addison-Wesley Publishing Company.

Soebagio, Suharti dan Sukirman. 1993. *Struktur Aljabar*. Jakarta: Universitas Terbuka.

ANALISIS SISTEM ANTRIAN DUA TAHAP PELAYANAN MODEL *M/M/*1 DENGAN *N-POLICY*, PELAYANAN LAMBAT, DAN PELANGGAN TIDAK SABAR

Fiqqih Sinatrya Maghfiroh [1], Hariyanto [2]

[1] nurakhilla.13@gmail.com, [2] hariyantomath@gmail.com

[1,2] Program Studi Pascasarjana, Jurusan Matematika, Fakultas MIPA

Institut Teknologi Sepuluh Nopember

ABSTRAK

Antrian terjadi karena adanya keterbatasan sumber pelayanan yang umumnya berkaitan dengan terbatasnya *server*. Teori antrian dengan *N-policy* mempunyai karakteristik dimana *server* akan menggunakan waktu menganggurnya untuk melakukan tugas lain sehingga mengharuskan *server* meninggalkan sistem pelayanan saat tidak ada pelanggan dan akan aktif melakukan pelayanan kembali setelah terdapat sejumlah *N* pelanggan yang menunggu untuk dilayani. Pada usulan penelitian ini, peneliti akan menganalisis sistem antrian dua tahap pelayanan menggunakan model M/M/1. Terdapat seorang *server* (*single server*) yang melayani pelanggan secara berkelompok di tahap 1 dilanjutkan pelayanan secara individu di tahap 2. Sistem antrian mempertimbangkan keadaan *server* yang lambat dan pelanggan yang tidak sabar. Karakteristik *server* dalam sistem antrian *N-policy* model M/M/1 dengan dua tahap pelayanan pada usulan penelitian ini menimbulkan sistem antrian terbagi menjadi enam *state*. Analisis model dilakukakan untuk mendapatkan probabilitas kejadian masing-masing *state*, ekspektasi banyaknya pelanggan, dan waktu tunggu pelanggan dalam sistem. Selanjutnya dilakukan simulasi untuk menganalisa sensitifitas nilai *N* terhadap parameter-parameter pada fungsi biaya total.

Kata Kunci: *Teori Antrian, M/M/1, N-policy, fungsi biaya*

I. Pendahuluan

Teori antrian (*Queueing Theory*) merupakan studi probabilistik kejadian garis tunggu (*waiting lines*), yakni suatu garis tunggu dari pelanggan yang memerlukan layanan dari sistem yangada. Antrian terjadi karena adanya keterbatasan sumber pelayanan, yang umumnya